AVALIAÇÃO DE QUATRO MODELOS MATEMÁTICOS PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA DA FUNÇÃO GAMA

EVALUATION OF FOUR MATHEMATICAL MODELS FOR GAMMA FUNCTION NUMERICAL SOLUTION

Márcio José Catalunha[1],Gilberto Chohaku Sediyama[2], Brauliro Gonçalves Leal[3], Carlos Pedro Boechat Soares[4]

RESUMO:

A função gama é o resultado da transformada de Laplace da função t^{α} para $\alpha > -1$. Em sua forma elementar, ela é definida pela integral de zero a infinito, tendo como entrada uma variável aleatória *alfa,* a qual não possui solução analítica direta e, ou, imediata. Dessa forma, há necessidade de funções auxiliares ou modelos aproximadores para estimação da função gama tais como as funções assintóticas, as funções de Stirling e as equações polinomiais etc. Essas funções foram avaliadas e testadas, no presente artigo, tendo como referência a solução implícita do software MatLab®. Concluiu-se que o melhor método para estimar a função gama, especialmente para cálculo de probabilidades de chuvas diárias (dado um *alfa* entre zero a cem, que são valores mais comuns em estudos de distribuições de probabilidade de chuvas diárias), foi a função polinomial, por apresentar boa precisão, e pouco esforço computacional. O método citado por Assis et al. (1996) e o assintótico apresentaram problemas de superestimação e subestimação, respectivamente, na aproximação da função gama, no intervalo considerado para o valor de *alfa*, sendo, portanto, menos indicados.

Palavras-chave: Função gama, funções aproximadoras, modelo matemático.

SUMMARY:

The Gamma function is obtained from the Laplace transform of the function t^{α}, where $\alpha > -1$, but α is not necessarily an integer. The mathematical model of the Gamma function, in its more elementary form, uses the integral calculation from zero to infinite, in which the input variable is the *alpha* parameter. There is no direct analytic solution for the

[1] Doutorando em Eng. Agrícola - UFV-MG (catalunha@catalunha.eng.br);
[2] Professor Ph. D. do Departamento de Eng. Agrícola – UFV-MG(sediayama@mail.ufv.br)
[3] Professor Dr. da Faculdade de Ciências e Tecnologia – UNIVALE-MG (brauliro@univale.br);
[4] Professor Dr. do Departamento de Eng. Florestal – UFV-MG(csoares@mail.ufv.br).

Gamma function. Many numerical solutions have been proposed to solve the Gamma function, such as the asymptotic functions, Stirling functions, and polynomials equations etc. In this work, those models were tested against the implicit solution of MatLab® software for Gamma function as reference. The best method to estimate the Gamma function (given an *alpha* between zero and one hundred, for using in daily rainfall probability distribution) was the polynomial approach, with pretty much little computational effort. The method mentioned by Assis et al. (1996) and the asymptotic functions were not indicated due to overestimation and underestimation, respectively, in the approach of the Gamma function solution.

Keywords: Gamma function, approaching functions, mathematical models.

INTRODUÇÃO:

São inúmeros os trabalhos científicos que envolvem a função gama, especialmente em estudos de probabilidades de ocorrências de chuvas. Stern e Coe (1982), citados por ALMEIDA (1995), testaram a distribuição gama para estimar as quantidades de chuva diárias, em localidades da Jordânia, Nigéria, Botswana e Sri Lanka, com resultados satisfatórios. FARIA (1998) utilizou a distribuição gama para estimar a precipitação dependente, ao nível de 75% de probabilidade, para algumas localidades do estado de Minas Gerais e obteve boa aderência estatística. CATALUNHA (2000) avaliou o ajustamento de várias funções densidade de probabilidade a séries de precipitação pluvial, também, no estado de Minas Gerais, mostrando o alto grau ajustamento para a distribuição gama, sendo superada apenas pela distribuição de probabilidade Weibull.

A função cumulativa de probabilidade da distribuição gama utiliza a função gama, representada pelo símbolo Γ (gama), como parte integrante de seu modelo matemático, conforme apresentado na equação 1 (KOTZ e JOHNSON, 1970).

$$F(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \qquad \text{Eq. 1}$$

Um estudo de métodos para solução aproximada da função gama, neste contexto é, portanto, oportuna, devido a sua freqüente utilização. A função gama tem como parâmetro de entrada um valor aleatório α (*alfa*), que trata do parâmetro de forma da função.

Considerando os resultados da pesquisa de CATALUNHA (2000), que utilizou as séries históricas de dados pluviométricos do estado de Minas Gerais variando entre 30 e 74 anos de dados contínuos e homogêneos, os parâmetros da distribuição gama, para dados diários, apresentaram valores mínimo, médio e máximo de *alfa* iguais a 0,32449, 1,16340 e 11,33372, respectivamente. Esta amplitude de variação implica na necessidade da utilização de um bom modelo para estimação da função gama, nesse intervalo do valor de *alfa*, para evitar a propagação de erro nas aplicações (MOOD, 1963).

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho foi testar, dentre os modelos existentes aquele que apresente melhor aproximação da solução para a função gama para um determinado intervalo de valores de *alfa* e com o menor desvio possível.

PROCEDIMENTOS:

Conforme já comentado, a função gama é obtida a partir da transformada de Laplace da função t^{α} para $\alpha > -1$, isto é:

$$L\{t^{\alpha}\} = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-x} dt \quad ,\text{para } \alpha > -1 \qquad \text{Eq. 2}$$

Fazendo St = x, na equação anterior, então, Sdt = dx; $(St)^{\alpha} = x^{\alpha}$, e $t^{\alpha} = \frac{x^{\alpha}}{S^{\alpha}}$. Introduzindo os termos correspondentes na Eq. 2 e fazendo as devidas substituições e simplificações tem-se:

$$L\{t^{\alpha}\} = \frac{1}{S^{\alpha+1}} \int x^{\alpha} e^{-x} dx, \quad (\alpha > -1) \qquad \text{Eq. 3}$$

Substituindo α por α-1, convenientemente, a função toma a forma da função gama:

$$S^{\alpha} L(t^{\alpha-1}) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad \text{Eq. 4}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \text{para} \quad \alpha \geq 0 \qquad \text{Eq. 5}$$

Utilizando a integração por partes, é possível mostrar que:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx = \alpha \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \qquad \text{Eq. 6}$$

ou, resumidamente, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha\,!$ Eq. 7

Analogamente, pode-se escrever que:

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(n+N) = \Gamma(n+1)\prod_{k=1}^{N-1}(n+N-k), \qquad \text{com} \quad \alpha > 2 \qquad \text{Eq. 8}$$

em que,

n = parte fracionária de α;
N = parte inteira de α, sendo $N \geq 2$;
k = 1,2,3...N

Para o caso em que $0 < \alpha \leq 1$, da Eq. 7, tem-se que:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \qquad \text{Eq. 9}$$

ABRAMOWITZ e STEGUN (1972) definem o seguinte polinômio aproximador para o cálculo da função gama, para um intervalo de $1 \leq \alpha \leq 2$, da seguinte forma:

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(x+1) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + \varepsilon \qquad \text{Eq. 10}$$

em que,

X = α - 1
a_1 = -0.577191652
a_2 = +0.988205891
a_3 = -0.897056937
a_4 = +0.918206857
a_5 = -0.756704078
a_6 = +0.482199394
a_7 = -0.193527818
a_8 = +0.035868343
ε = erro =

O mesmos autores mostram, ainda que a função gama pode também ser aproximada por duas outras funções, tais como:

1) fórmula de Stirling's,

$$\Gamma(\alpha) = e^{-\alpha}\alpha^{\alpha-0.5}\sqrt{2\pi}\left[1 + \frac{1}{12\ \alpha} + \frac{1}{288\ \alpha^2} - \frac{139}{51840\ \alpha^3} - \frac{571}{2488320\ \alpha^4} + \ldots\right] \ \text{, com } \alpha > 0 \qquad \text{Eq. 11}$$

2) fórmula assintótica:

$$\ln\Gamma(\alpha) = (\alpha - 0.5)\ln\alpha - \alpha + 0.5\ln(2\pi) + \frac{1}{12\alpha} - \frac{1}{360\alpha^3} + \frac{1}{1260\alpha^5} - \frac{1}{1680\alpha^7} + \ldots \quad ,\text{com } \alpha > 0 \qquad \text{Eq. 12}$$

ASSIS et al. (1996) citam uma outra equação para aproximação da função gama:

$$\Gamma(\alpha) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{\alpha[\ln\alpha - f(\alpha)]}, \text{ sendo, } f(\alpha) = 1 - \frac{1}{12\alpha^2} + \frac{1}{360\alpha^4} - \frac{1}{1260\alpha^6}, \text{ com } \alpha > 0 \qquad \text{Eq. 13}$$

Para avaliar o método de aproximação do valor da função gama, dentre os quatro apresentados anteriormente, tomou-se como referência a solução da função implícita do software MatLab®, versão 5, da empresa MathWorks, que comparada com os resultados do software Derive®, versão 4.08, da empresa Soft WareHouse, os cálculos da função gama, para diversos valores de α (*alfa*), coincidiram em até o 13º dígitos decimais, daí a consideração como referência. Além disso, o software MatLab foi escolhido pela disponibilidade e facilidade de programação e elaboração de gráficos.

Utilizando a linguagem de programação própria do ambiente MatLab, foram implementados os algoritmos com as equações apresentadas, para solução aproximada da função gama. Foram realizados testes com os diversos valores de *alfa*, compreendidos entre 0 e 100, com incremento de 10^{-5}, com o objetivo de avaliar os desvios apresentados pelos diferentes modelos de aproximação.

RESULTADOS E DISCUSSÕES:

Os intervalos de valores de *alfa* que apresentaram maior divergência entre as equações foram os compreendidos entre 0 e 1, sendo que os demais foram precisos até o quinto dígito decimal.

A Figura 1 apresenta no eixo das ordenadas os valores de α para os intervalos de 0,3 a 0,8, com incremento de 10^{-5}. Não foram considerados os valores de *alfa* entre 0,00001 a 0,3, uma vez que os erros foram ainda bem maiores e superaram todas as expectativas. Além disso, não são valores normalmente encontrados para valores de *alfa*, em estudos de probabilidades de chuvas diárias. Pode-se notar que, utilizando-se a Equação 8 (com o complemento das Equações 9 e 10), os valores calculados se aproximaram muito do valor tido como referência, havendo inclusive a sobreposição de pontos no gráfico. Nos demais métodos, os valores foram superestimados ou subestimados, principalmente para valores de *alfa* inferiores a 0,5. Para valores de α maiores do que um, todas as funções aproximadoras avaliadas apresentaram a mesma precisão na estimação da função gama, isto é, houve uma convergência do valor da função gama quando os valores de *alfa* foram superiores a unidade, para todas as funções aproximadoras.

A equação citada por Assis et al. (1996) mostrou-se como um bom método para aproximação da função gama, também para valores de *alfa* superior a 0,5, contudo, apresentou desvio considerável para *alfa* menores que 0,5. Portanto, deve-se ter cautela na utilização desse modelo em estudos de probabilidades de chuvas, para os valores diários e, especialmente, para o período seco do ano, uma vez que o seu uso conduziria a uma superestimação da função gama, como pode ser visto na Figura 1. Para o estado de Minas Gerais, por exemplo, os valores de *alfa*, para chuvas diárias estão entre o valor mínimo de 0,32449 e uma média de 1,16340. Dessa forma, a utilização desse métode poderia levar a propagação de erros nos cálculos das probabilidades diárias de chuvas, principalmente para os períodos secos do ano, quando os valores de *alfa* são ainda menores.

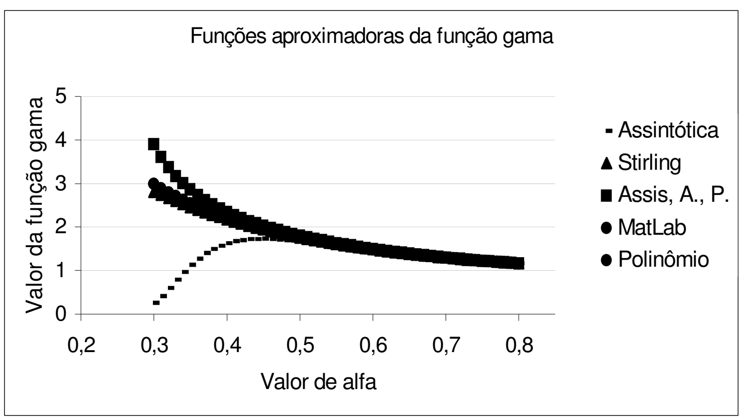

Figura 1. Valores estimados da função gama para os diferentes métodos para valores de *alfa* variando de 0,3 a 0,8.

A Figura 2 apresenta os erros em percentagem, tendo como referência o resultado da solução pela função implícita do software MatLab®, na estimação dos valores da função gama. Pode-se notar que os erros relativos são, praticamente, nulos, ou bem próximos de zero, quando utilizada a função Polinomial (Equação 10). O modelo Assintótico tende a subestimar os valores da função gama, sendo este comportamento predominante quando são analisados os maiores valores para *alfa*. A função Stirling, também subestimam os valores da função gama, contudo com menor amplitude. O modelo citado por ASSIS et al. (1996), conforme apontado anteriormente, apresenta superestimação maiores, para valores de *alfa* inferiores a unidade.

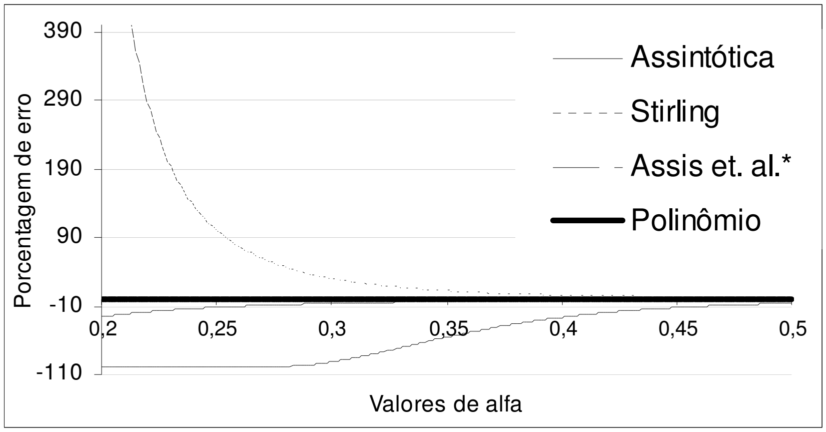

Figura 2. Erros relativos (em percentagem) causado pelos métodos de estimação estudados para *alfa* variando de 0,2 a 0,5.

CONCLUSÕES:

Diante dos resultados apresentados conclui-se que, para os intervalos de *alfa* estudados (zero a 100) a função Polinomial (Eq. 10, em conjunto com as equações 8 e 9) apresentou-se como a melhor opção para aproximação da função gama, principalmente face a pequena demanda computacional. Para valores de *alfa* superiores a 0,5, todas as funções aproximadoras testadas foram equivalentes e podem ser utilizadas indistintamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A.; **Handbook of mathematical functions.** New York, Dover, 1972, 1046p.

ALMEIDA, R. M. B.; **Características climatológicas do regime de chuva em Minas Gerais**, Viçosa, UFV, 1995, 64p. Dissertação Mestrado.

ASSIS, F. N. DE., ARRUDA, H.V., PEREIRA, A. R. **Aplicações de estatística à climatologia**, Pelotas, Ed. Universitária, UFPel, 1996, 161p.

BARROSO, L. C. & BARROSO, M. M. A. **Cálculo numérico com aplicações**. São Paulo, Harbra, 1987.

CATALUNHA, M. J. **Avaliação do ajustamento de funções densidade de probabilidade a séries de precipitação pluvial no Estado de Minas Gerais.** UFV, 2000, 72p. Dissertação Mestrado.

FARIA, R. A.; **Demanda de irrigação suplementar no Estado de Minas Gerais**, Viçosa, UFV, 1998, 75p. Dissertação Mestrado.

KOTZ, S.; JOHNSON, N. L.; **Distribution in statistics, continuous univariate distribution**. New York, Hougton Mifflin, 1970, 2v.

MOOD, A. M; GRAYBILL,F.A.; BOES,D.C.; **Introduction to the theory of statistics, New York**. MacGraw-Hill, 1963, 2ed, 443p.

THOM, H.C.S.; **A note on the Gamma distribution**. Monthly Weather Review, Washington, v86, 1958, p117-122.